Cours de Statistiques Inférentielles

CQLS : cqls@upmf-grenoble.fr

9 février 2018

Plan

Motivation

Motivation

1. Quelle confiance accordez-vous à deux estimations obtenues à partir de 2 echantillons de tailles respectives $n = 5$ et $n = 1000$?

Motivation

1. Quelle confiance accordez-vous à deux estimations obtenues à partir de 2 echantillons de tailles respectives $n = 5$ et $n = 1000$?
2. Plus généralement, quelle confiance doit-on accorder à une estimation $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y})$ le **jour J** selon son erreur standard $\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y})$ plus ou moins grande.

Motivation

1. Quelle confiance accordez-vous à deux estimations obtenues à partir de 2 echantillons de tailles respectives $n = 5$ et $n = 1000$?
2. Plus généralement, quelle confiance doit-on accorder à une estimation $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y})$ le **jour J** selon son erreur standard $\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y})$ plus ou moins grande.
3. Interprétation des résultats d'un sondage avant le premier tour des élections présidentielles 2002 : Votre attitude aurait-elle été influencée si à la place d'une estimation $\widehat{p^J}(\mathbf{y})$ (autour de 17%) pour le candidat Jospin, on vous avait fourni une "fourchette" $[14.67\%, 19.33\%]$. Il paraît que cette information ne nous est pas fourni car les Français ne sauraient pas interpréter ce type de résultats. Qu'en pensez-vous ?

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$

Un Futur échantillon **Y** !

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ —— $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$

Une future estimation $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y})$

Sa future erreur standard $\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})$

*Construction Intervalle de Confiance et **A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ —— $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$

Une future estimation $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(\theta^\bullet, \sigma_{\widehat{\theta^\bullet}})$ **inconnue**

Sa future erreur standard $\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y}) \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}, \sigma_{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}})$ **inconnue**

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$$\boxed{\mathbf{Y}} \longrightarrow \boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \longrightarrow \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$$

Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$

Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

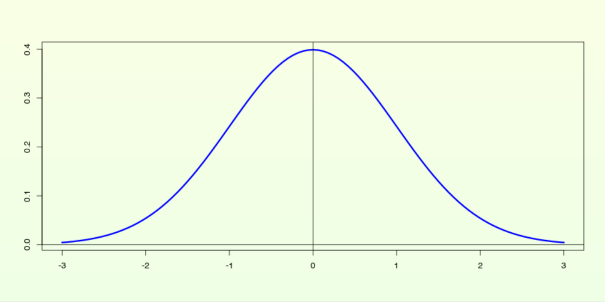
$$\boxed{\mathbf{Y}} \longrightarrow \boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \longrightarrow \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$$

Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$

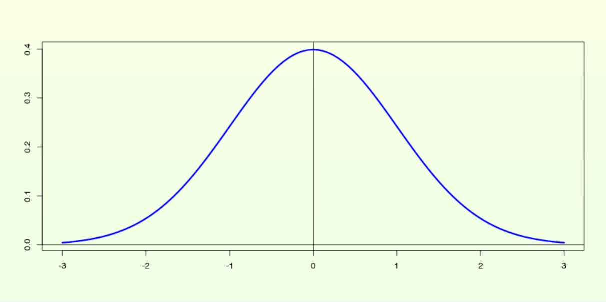


Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1) \text{ connue !}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$



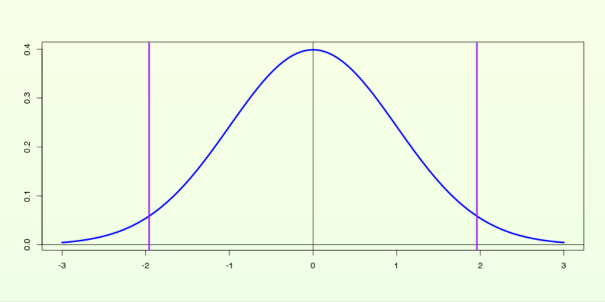
Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1) \text{ connue !}$$

$\rightarrow$ détermination de $[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]$?

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

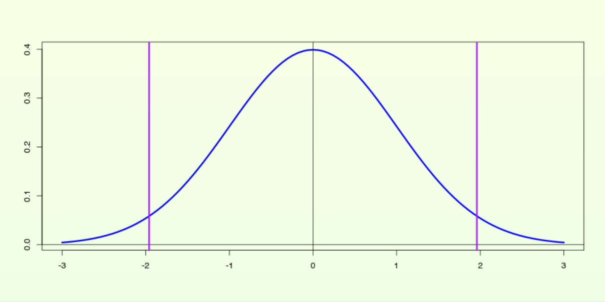
$$\boxed{\mathbf{Y}} \;—\; \boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \;—\; \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})} \qquad \boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$$



$$1-\alpha \simeq \mathbb{P}\left(-\delta^{+}_{lim,\frac{\alpha}{2}} \leq \delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) \leq \delta^{+}_{lim,\frac{\alpha}{2}}\right) \text{ avec } \delta^{+}_{lim,\frac{\alpha}{2}} \left\{ \begin{array}{l} = q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\mathcal{N}(0,1)) \\ \simeq 1.96 \text{ si } \alpha = 5\% \end{array} \right.$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$



$$1 - \alpha \simeq \mathbb{P}\left(-\delta^{+}_{lim,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \leq \delta^{+}_{lim,\frac{\alpha}{2}} \right)$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$$\boxed{\mathbf{Y}} \;-\!\!-\; \boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \;-\!\!-\; \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})} \qquad \boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$$

$$1-\alpha \simeq \mathbb{P}\left(-\delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y}) \leq \widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet \leq \delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})\right)$$

*Construction Intervalle de Confiance et **A. E. P.***

$$\boxed{\mathbf{Y}} \;-\!\!-\; \boxed{\widehat{\theta^{\bullet}}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^{\bullet}}}}(\mathbf{Y})} \;-\!\!-\; \boxed{\delta_{\widehat{\theta^{\bullet}},\theta^{\bullet}}(\mathbf{Y})} \qquad \boxed{\left[\widetilde{\theta^{\bullet}}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^{\bullet}}_{sup}(\mathbf{Y})\right]}$$

$$1-\alpha \simeq \mathbb{P}\left(-\delta^{+}_{lim,\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^{\bullet}}}}(\mathbf{Y}) \leq \theta^{\bullet} - \widehat{\theta^{\bullet}}(\mathbf{Y}) \leq \delta^{+}_{lim,\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^{\bullet}}}}(\mathbf{Y})\right)$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{\mathbf{Y}} \arrow[r, dash] & \boxed{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{Y}\right), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{Y}\right)} \arrow[r, dash] \arrow[rr, dash, bend left] & \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{Y}\right)} & \boxed{\left[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{Y}\right), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{Y}\right)\right]}
\end{tikzcd}
$$

$$1-\alpha \simeq \mathbb{P}\left(\underbrace{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{Y}\right) - \delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{Y}\right)}_{\widetilde{\theta^\bullet}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{Y})} \leq \theta^\bullet \leq \underbrace{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{Y}\right) + \delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{Y}\right)}_{\widetilde{\theta^\bullet}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{Y})} \right)$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$

$1^{\text{ème}}$ réalisation

$\boxed{\mathbf{y_{[1]}}}$

Construisons un premier échantillon $\mathbf{y_{[1]}}$!

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$

$1^{ème}$ réalisation

$\boxed{\mathbf{y_{[1]}}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[1]}\right)}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)]}$

L'intervalle de confiance calculé à partir de $\mathbf{y_{[1]}}$ est **"bon"** dans sa mission ssi

$$\boxed{\theta^\bullet \in [\widetilde{\theta^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widetilde{\theta^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)]} \Leftrightarrow \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[1]}}) \in [-\delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}}, \delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}}]}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})$ — $\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})$ — $[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]$

$\boxed{\mathbf{y_{[1]}}}$ — $\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)$ — $\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[1]}\right)$ — $[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)]$

$2^{ème}$ réalisation

$\boxed{\mathbf{y_{[2]}}}$

Construisons un deuxième échantillon $\mathbf{y_{[2]}}$!

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$

$\boxed{\mathbf{y_{[1]}}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[1]}\right)}$ — $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)]}$

$2^{\text{ème}}$ réalisation

$\boxed{\mathbf{y_{[2]}}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right)}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[2]}\right)}$ — $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right)]}$

L'intervalle de confiance calculé à partir de $\mathbf{y_{[2]}}$ est **"bon"** dans sa mission ssi

$$\boxed{\theta^\bullet \in [\widetilde{\theta^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right), \widetilde{\theta^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right)]} \Leftrightarrow \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[2]}}) \in [-\delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}}, \delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}}]}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$

$\boxed{\mathbf{y_{[1]}}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[1]}}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[1]}})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[1]}\right)}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{y_{[1]}}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{y_{[1]}})]}$

$\boxed{\mathbf{y_{[2]}}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[2]}}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[2]}})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[2]}\right)}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{y_{[2]}}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{y_{[2]}})]}$

$\vdots$

$m^{ème}$ réalisation

$\boxed{\mathbf{y_{[m]}}}$

Construisons un $m^{ème}$ échantillon $\mathbf{y_{[m]}}$!

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}),\widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$

$\boxed{\mathbf{y_{[1]}}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[1]}\right)}$ — $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right),\widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)]}$

$\boxed{\mathbf{y_{[2]}}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right)}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[2]}\right)}$ — $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right),\widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right)]}$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$m^{ème}$ réalisation

$\boxed{\mathbf{y_{[m]}}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[m]}}\right),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[m]}}\right)}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[m]}\right)}$ — $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[m]}}\right),\widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[m]}}\right)]}$

L'intervalle de confiance calculé à partir de $\mathbf{y_{[m]}}$ est **"bon"** dans sa mission ssi

$$\boxed{\theta^\bullet \in [\widetilde{\theta^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[m]}}\right),\widetilde{\theta^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[m]}}\right)]} \Leftrightarrow \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m]}}) \in [-\delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}},\delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}}]}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}),\widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]$
$\boxed{\mathbf{y_{[1]}}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[1]}}),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[1]}})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[1]}\right)$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{y_{[1]}}),\widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{y_{[1]}})]$
$\boxed{\mathbf{y_{[2]}}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[2]}}),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[2]}})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[2]}\right)$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{y_{[2]}}),\widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{y_{[2]}})]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\boxed{\mathbf{y_{[m]}}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m]}}),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[m]}})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[m]}\right)$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{y_{[m]}}),\widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{y_{[m]}})]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Interprétation par l'A.E.P. : nous imaginons disposer d'une infinité d'intervalles de confiance dont une proportion $(\simeq)$ $1-\alpha$ (i.e. niveau de confiance) sont "bons", i.e. contiennent le paramètre $\theta^\bullet$ inconnu.
Obtention de $[\widetilde{\theta^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}),\widetilde{\theta^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y})]$ le jour J : équivalent à un choix au hasard d'un unique intervalle de confiance parmi cette infinité ! ! !

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

1. niveau de confiance $1 - \alpha = 100\%$:
   - $n = 10$: $[?, ?]$, $[?, ?]$, $[?, ?]$, $\cdots$
   - $n = 100$: $[?, ?]$, $[?, ?]$, $[?, ?]$, $\cdots$
   - $n = 1000$: $[?, ?]$, $[?, ?]$, $[?, ?]$, $\cdots$

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

1. niveau de confiance $1 - \alpha = 100\%$:
   - $n = 10$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

1. niveau de confiance $1-\alpha = 100\%$:
   - $n = 10$: $[0,+\infty]$, $[0,+\infty]$,$[0,+\infty]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0,+\infty]$, $[0,+\infty]$,$[0,+\infty]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0,+\infty]$, $[0,+\infty]$,$[0,+\infty]$,$\cdots$
2. niveau de confiance $1-\alpha = 95\%$:
   - $n = 10$: $[-0.118, 0.718]$, $[-0.096, 0.296]$, $[-0.199, 0.999]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0.129, 0.311]$, $[0.077, 0.263]$, $[0.101, 0.319]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0.197, 0.263]$, $[0.185, 0.247]$, $[0.162, 0.222]$,$\cdots$
3. niveau de confiance $1-\alpha = 50\%$:
   - $n = 10$: $[0.156, 0.444]$, $[0.033, 0.167]$, $[0.194, 0.606]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0.189, 0.251]$, $[0.138, 0.202]$, $[0.173, 0.247]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0.219, 0.241]$, $[0.205, 0.227]$, $[0.182, 0.202]$,$\cdots$
4. niveau de confiance $1-\alpha = 10\%$:
   - $n = 10$: $[0.273, 0.327]$, $[0.087, 0.113]$, $[0.362, 0.438]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0.214, 0.226]$, $[0.164, 0.176]$, $[0.203, 0.217]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0.228, 0.232]$, $[0.214, 0.218]$, $[0.19, 0.194]$,$\cdots$

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

1. niveau de confiance $1-\alpha = 100\%$:
   - $n = 10$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
2. niveau de confiance $1-\alpha = 95\%$:
   - $n = 10$: $[-0.118, 0.718]$, $[-0.096, 0.296]$, $[-0.199, 0.999]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0.129, 0.311]$, $[0.077, 0.263]$, $[0.101, 0.319]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0.197, 0.263]$, $[0.185, 0.247]$, $[0.162, 0.222]$,$\cdots$
3. niveau de confiance $1-\alpha = 50\%$:
   - $n = 10$: $[0.156, 0.444]$, $[0.033, 0.167]$, $[0.194, 0.606]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0.189, 0.251]$, $[0.138, 0.202]$, $[0.173, 0.247]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0.219, 0.241]$, $[0.205, 0.227]$, $[0.182, 0.202]$,$\cdots$
4. niveau de confiance $1-\alpha = 10\%$:
   - $n = 10$: $[0.273, 0.327]$, $[0.087, 0.113]$, $[0.362, 0.438]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0.214, 0.226]$, $[0.164, 0.176]$, $[0.203, 0.217]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0.228, 0.232]$, $[0.214, 0.218]$, $[0.19, 0.194]$,$\cdots$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
7	0.22	0.187	0.253	1
8	0.222	0.19	0.254	1
9	0.186	0.157	0.215	1
10	0.216	0.184	0.248	1
11	0.198	0.168	0.228	1
12	0.228	0.195	0.261	1
13	0.198	0.168	0.228	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$Taux de succès=				95.14%

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathsf{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathsf{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathsf{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathsf{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7231	0.235	0.2	0.27	0
7232	0.194	0.165	0.223	1
7233	0.192	0.165	0.219	1
7234	0.195	0.165	0.225	1
7235	0.18	0.151	0.209	1
7236	0.181	0.153	0.209	1
7237	0.191	0.161	0.221	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathsf{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathsf{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$Taux de succès=				95.14%

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{Y}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{Y}\right)]\right) \simeq$Taux de succès=				95.14%

Question : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [0.172, 0.234]\right) = \ ?$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$ Taux de succès=				95.14%

Question : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [0.172, 0.234]\right) = 95\%$?

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$ Taux de succès=				95.14%

Réponse : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\underbrace{\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[1287]}}\right)}_{0.172}, \underbrace{\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[1287]}}\right)}_{0.234}]\right) = 100\%$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$Taux de succès=				95.14%

Question : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y})]\right) = \ ?$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}(\mathbf{y_{[j]}})$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{y_{[j]}})$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{y_{[j]}})$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{y_{[j]}}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{y_{[j]}})]$?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$Taux de succès=				95.14%

Réponse : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{y})]\right) = 0\%$ ou 100%

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$ Taux de succès=				95.14%

Question : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]\right) = \ ?$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$Taux de succès=				95.14%

Réponse : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]\right) = 95\%$

Application : Salaire Juste

Considérons (le **jour J**) disposer d'un échantillon **y** des Salaires Justes de n individus du Pays. Ce jeu de données est noté `yJ` en R. Les formules des intervalles de confiance à 95% pour μ^J et σ^2_J s'obtiennent très facilement :

Application : Salaire Juste

Considérons (le **jour J**) disposer d'un échantillon **y** des Salaires Justes de *n* individus du Pays. Ce jeu de données est noté yJ en R. Les formules des intervalles de confiance à 95% pour μ^J et σ^2_J s'obtiennent très facilement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\mu^J}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{y}) \\ \widetilde{\mu^J}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{y}) \end{array} \right. = \widehat{\mu^J}(\mathbf{y}) + \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} \times \delta^+_{lim,\alpha/2} \widehat{\sigma_{\widehat{\mu}^J}}(\mathbf{y})$$

$$\stackrel{\mathrm{R}}{=} \mathtt{mean(yJ)} + \mathtt{c(-1,1)} * \mathtt{qnorm(.975)} * \mathtt{seMean(yJ)}$$

$$\simeq 100.71 \left\{ \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \right\} 1.96 \times 0.33$$

$$\simeq [100.06, 101.36]$$

Application : Salaire Juste

Considérons (le **jour J**) disposer d'un échantillon **y** des Salaires Justes de n individus du Pays. Ce jeu de données est noté yJ en R. Les formules des intervalles de confiance à 95% pour μ^J et σ^2_J s'obtiennent très facilement :

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l}\widetilde{\sigma^2_{J_{\text{inf}}}}(\mathbf{y}) \\ \widetilde{\sigma^2_{J_{\text{sup}}}}(\mathbf{y})\end{array}\right. &= \widehat{\sigma^2_J}(\mathbf{y}) + \left\{\begin{array}{c}-1\\1\end{array}\right\} \times \delta^+_{lim,\alpha/2}\,\widehat{\sigma_{\widehat{\sigma^2_J}}}(\mathbf{y}) \\
&\stackrel{R}{=} \mathtt{var(yJ)} + \mathtt{c}(-1,1) * \mathtt{qnorm(.975)} * \mathtt{seVar(yJ)} \\
&\simeq 110.29 \quad \left\{\begin{array}{c}-\\+\end{array}\right\} \quad 1.96 \times 12.12 \\
&\simeq [86.53, 134.06]
\end{aligned}
$$