Cours de Statistiques Inférentielles

CQLS : cqls@upmf-grenoble.fr

9 février 2018

Plan

Décision pour le Produit •

Objectif : Nous rappelons que l'industriel désire établir une règle de décision à partir d'une unique estimation obtenue le **Jour J** quant au lancement du produit •.

Décision pour le Produit •

Question : Quelle est la forme de la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt (c-à-d $\mu^\bullet > 0.15$) ?

Décision pour le Produit $\bullet$

Question : Quelle est la forme de la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt (c-à-d $\mu^\bullet > 0.15$) ?
Réponse : Accepter l'assertion d'intérêt si $\widehat{\mu^\bullet}(\mathbf{y}^\bullet) > \mu_{lim}$.

Décision pour le Produit A

Question : Pour différentes urnes U_p^A, l'expérimentateur a évalué $\overline{\left(\widehat{p^A}\left(\mathbf{y}^{\mathbf{A}}_{[\cdot]}\right) > p_{lim}\right)}_{10000}$. Comment ces valeurs ont-elles été obtenues ?

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	$0\% \simeq 0\%$	$0\% \simeq 0\%$	$0\% \simeq 0\%$
14%	$16.57\% \simeq 18.11\%$	$0.32\% \simeq 0.31\%$	$0\% \simeq 0\%$
15%	$48.06\% \simeq 50\%$	$3.68\% \simeq 3.83\%$	$0\% \simeq 0\%$
15.1%	$51.52\% \simeq 53.52\%$	$4.3\% \simeq 4.67\%$	$0\% \simeq 0\%$
16%	$78.95\% \simeq 80.58\%$	$17.88\% \simeq 19.42\%$	$0.06\% \simeq 0.03\%$
20%	$99.99\% \simeq 100\%$	$99.02\% \simeq 99.11\%$	$48.23\% \simeq 50\%$

Décision pour le Produit A

Question : Pour différentes urnes U_p^A, l'expérimentateur a évalué $\overline{\left(\widehat{p^A}\left(\mathbf{y}^{\mathbf{A}}_{[\cdot]}\right) > p_{lim}\right)}_{10000}$. Comment ces valeurs ont-elles été obtenues ?

Réponse : proportions parmi $m = 10000$ (et parmi $m = \infty$ avec un peu de patience) estimations $\widehat{p^A}\left(\mathbf{y}^{\mathbf{A}}_{[\cdot]}\right)$ supérieures à p_{lim}.

	p_{lim}		
p	15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

Décision pour le Produit A

Question : Comment la connaissance du mathématicien $\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(p^A, \sqrt{\frac{p^A(1-p^A)}{n}})$ a été utilisée ?

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

Décision pour le Produit A

Question : Comment la connaissance du mathématicien $\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right) \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(p^A, \sqrt{\frac{p^A(1-p^A)}{n}})$ a été utilisée ?

Réponse :

$P_{p^A=p}(\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right) > p_{lim}) \overset{R}{=} 1 - \mathtt{pnorm}(\mathtt{plim}, \mathtt{p}, \mathtt{sqrt}(\mathtt{p} * (1 - \mathtt{p})/\mathtt{n}))$.

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

Décision pour le Produit A

Question : Avec le point de vue de l'industriel, quelles valeurs de $P_{p^A=p}(\widehat{p^A}(\mathbf{Y^A}) > p_{lim}) \simeq \overline{\left(\widehat{p^A}\left(\mathbf{y^A_{[\cdot]}}\right) > p_{lim}\right)}_{10000}$ conduisent à des risques d'erreur de décision (nature à préciser) trop grands ?

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

Décision pour le Produit A

Réponse : pour p =10%, 14% et 15%, on a un **Risque 1ère espèce** (devenir pauvre) **raisonnable ($<$ 5%)** et **plutôt grand ($\geq$ 5%)**

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

Décision pour le Produit A

Réponse : pour p =10%, 14% et 15%, on a un **Risque 1ère espèce** (devenir pauvre) **raisonnable ($<$ 5%)** et **plutôt grand ($\geq$ 5%)** et pour p =15.1%, 16% et 20%, **Risque 2ème espèce** (ne pas devenir riche) **raisonnable ($<$ 5%)** et **plutôt grand ($\geq$ 5%)**

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

Décision pour le Produit A

Question : Peut-on choisir p_{lim} de sorte que tous les risques de 1ère et 2ème espèces soient raisonnablement petits ?

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

Décision pour le Produit A

Question : Peut-on choisir p_{lim} de sorte que tous les risques de 1ère et 2ème espèces soient raisonnablement petits ?
Réponse : Non, puisque somme des risques de 1ère et 2ème espèces peut être aussi proche de 1 (ex : $p = 15\%$ et $p = 15.1\%$) !

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	0% ≃ 0%	0% ≃ 0%	0% ≃ 0%
14%	16.57% ≃ 18.11%	0.32% ≃ 0.31%	0% ≃ 0%
15%	48.06% ≃ 50%	3.68% ≃ 3.83%	0% ≃ 0%
15.1%	51.52% ≃ 53.52%	4.3% ≃ 4.67%	0% ≃ 0%
16%	78.95% ≃ 80.58%	17.88% ≃ 19.42%	0.06% ≃ 0.03%
20%	99.99% ≃ 100%	99.02% ≃ 99.11%	48.23% ≃ 50%

Décision pour le Produit A

Question : Quel risque faut-il alors essayer de controler lors du choix de p_{lim} ?

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

Décision pour le Produit A

Question : Quel risque faut-il alors essayer de controler lors du choix de p_{lim} ?
Réponse : le plus grave, c-à-d le risque de 1ère espèce (ici devenir pauvre), uniquement possible pour $p^A = p \leq 15\%$.

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	$0\% \simeq 0\%$	$0\% \simeq 0\%$	$0\% \simeq 0\%$
14%	$16.57\% \simeq 18.11\%$	$0.32\% \simeq 0.31\%$	$0\% \simeq 0\%$
15%	$48.06\% \simeq 50\%$	$3.68\% \simeq 3.83\%$	$0\% \simeq 0\%$
15.1%	$51.52\% \simeq 53.52\%$	$4.3\% \simeq 4.67\%$	$0\% \simeq 0\%$
16%	$78.95\% \simeq 80.58\%$	$17.88\% \simeq 19.42\%$	$0.06\% \simeq 0.03\%$
20%	$99.99\% \simeq 100\%$	$99.02\% \simeq 99.11\%$	$48.23\% \simeq 50\%$

Décision pour le Produit A

Question : Parmi les mauvaises situations pour l'industriel $p \leq 15\%$ (ici $p = 10\%$, 14% et 15%), quelle est la pire au sens du plus grand risque de 1ère espèce ?

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

Décision pour le Produit A

Question : Parmi les mauvaises situations pour l'industriel $p \leq 15\%$ (ici $p = 10\%$, 14% et 15%), quelle est la pire au sens du plus grand risque de 1ère espèce ?

Réponse : $p^A = p = 15\%$. Les risques avec $p < 15\%$ sont plus petits !

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	$0\% \simeq 0\%$	$0\% \simeq 0\%$	$0\% \simeq 0\%$
14%	$16.57\% \simeq 18.11\%$	$0.32\% \simeq 0.31\%$	$0\% \simeq 0\%$
15%	$48.06\% \simeq 50\%$	$3.68\% \simeq 3.83\%$	$0\% \simeq 0\%$
15.1%	$51.52\% \simeq 53.52\%$	$4.3\% \simeq 4.67\%$	$0\% \simeq 0\%$
16%	$78.95\% \simeq 80.58\%$	$17.88\% \simeq 19.42\%$	$0.06\% \simeq 0.03\%$
20%	$99.99\% \simeq 100\%$	$99.02\% \simeq 99.11\%$	$48.23\% \simeq 50\%$

Décision pour le Produit A

Question : Parmi les mauvaises situations pour l'industriel $p \leq 15\%$ (ici $p = 10\%$, 14% et 15%), quelle est la pire au sens du plus grand risque de 1ère espèce ?
Réponse : $p^A = 15\%$ sera **la pire des (mauvaises) situations** !

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.32% $\simeq$ 0.31%	0% $\simeq$ 0%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	3.68% $\simeq$ 3.83%	0% $\simeq$ 0%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	4.3% $\simeq$ 4.67%	0% $\simeq$ 0%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	17.88% $\simeq$ 19.42%	0.06% $\simeq$ 0.03%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.02% $\simeq$ 99.11%	48.23% $\simeq$ 50%

Décision pour le Produit A

Question : Dans **la pire des situations**, comment choisir $p_{lim,\alpha}$ pour avoir un risque maximal de 1ère espèce fixé à $\alpha = 5\%$?

p	p_{lim} 15%	17%	20%
10%	$0\% \simeq 0\%$	$0\% \simeq 0\%$	$0\% \simeq 0\%$
14%	$16.57\% \simeq 18.11\%$	$0.32\% \simeq 0.31\%$	$0\% \simeq 0\%$
15%	$48.06\% \simeq 50\%$	$3.68\% \simeq 3.83\%$	$0\% \simeq 0\%$
15.1%	$51.52\% \simeq 53.52\%$	$4.3\% \simeq 4.67\%$	$0\% \simeq 0\%$
16%	$78.95\% \simeq 80.58\%$	$17.88\% \simeq 19.42\%$	$0.06\% \simeq 0.03\%$
20%	$99.99\% \simeq 100\%$	$99.02\% \simeq 99.11\%$	$48.23\% \simeq 50\%$

Décision pour le Produit A

Question : Dans **la pire des situations**, comment choisir $p_{lim,\alpha}$ pour avoir un risque maximal de 1ère espèce fixé à $\alpha = 5\%$?

Réponse : trouver $p_{lim,\alpha}$ tq $P_{p^A=15\%}(\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right) > p_{lim,\alpha}) = \alpha = 5\%$

p	p_{lim} 15%	16.8573%	17%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.52% $\simeq$ 0.46%	0.32% $\simeq$ 0.31%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	5.17% $\simeq$ 5%	3.68% $\simeq$ 3.83%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	6.18% $\simeq$ 6.03%	4.3% $\simeq$ 4.67%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	22.89% $\simeq$ 22.98%	17.88% $\simeq$ 19.42%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.35% $\simeq$ 99.35%	99.02% $\simeq$ 99.11%

Décision pour le Produit A

Question : Dans **la pire des situations**, comment choisir $p_{lim,\alpha}$ pour avoir un risque maximal de 1ère espèce fixé à $\alpha = 5\%$?

Réponse : trouver $p_{lim,\alpha}$ tq $P_{p^A=15\%}(\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right) > p_{lim,\alpha}) = \alpha = 5\%$

c-à-d $p_{lim,5\%} \overset{R}{=}$ `qnorm(.95, .15, sqrt(.15 * .85/1000)` $= 16.8573\%$.

p	p_{lim} 15%	16.8573%	17%
10%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
14%	16.57% $\simeq$ 18.11%	0.52% $\simeq$ 0.46%	0.32% $\simeq$ 0.31%
15%	48.06% $\simeq$ 50%	5.17% $\simeq$ 5%	3.68% $\simeq$ 3.83%
15.1%	51.52% $\simeq$ 53.52%	6.18% $\simeq$ 6.03%	4.3% $\simeq$ 4.67%
16%	78.95% $\simeq$ 80.58%	22.89% $\simeq$ 22.98%	17.88% $\simeq$ 19.42%
20%	99.99% $\simeq$ 100%	99.35% $\simeq$ 99.35%	99.02% $\simeq$ 99.11%

Décision pour le Produit A

Question Comment s'écrit l'assertion d'intérêt $\mathbf{H_1}$ en fonction du paramètre d'intérêt ?

Décision pour le Produit A

Question Comment s'écrit l'assertion d'intérêt $\mathbf{H_1}$ en fonction du paramètre d'intérêt ?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_1}$: $p^A > 15\%$

Décision pour le Produit A

Question : Quelle est la pire des situations, i.e. parmi toutes les situations quelle est celle qui engendre le plus grand risque d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_1}$: $p^A > 15\%$

Décision pour le Produit A

Question : Quelle est la pire des situations, i.e. parmi toutes les situations quelle est celle qui engendre le plus grand risque d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $p^A = 15\%$ vs $\mathbf{H_1}$: $p^A > 15\%$

Décision pour le Produit A

Question : Quelle est l'information du mathématicien quant au comportement de $\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right)$ dans la pire des situations ?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $p^A = 15\%$ vs $\mathbf{H_1}$: $p^A > 15\%$

Décision pour le Produit A

Question : Quelle est l'information du mathématicien quant au comportement de $\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right)$ dans la pire des situations ?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $p^A = 15\%$ vs $\mathbf{H_1}$: $p^A > 15\%$

Statistique de test sous $\mathbf{H_0}$:

$$\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right) \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

Décision pour le Produit A

Question : Comment s'écrit la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt ne produisant pas plus de 5% d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $p^A = 15\%$ vs $\mathbf{H_1}$: $p^A > 15\%$

Statistique de test sous $\mathbf{H_0}$:

$$\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right) \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

Décision pour le Produit A

Question : Comment s'écrit la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt ne produisant pas plus de 5% d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $p^A = 15\%$ vs $\mathbf{H_1}$: $p^A > 15\%$

Statistique de test sous $\mathbf{H_0}$:

$$\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right) \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

Règle de Décision :

$$\text{Accepter } \mathbf{H_1} \text{ si } \widehat{p^A}\left(\mathbf{y^A}\right) > p_{lim,\alpha}$$

Décision pour le Produit A

Question : Comment concluerieriez-vous au vu des données de l'industriel stockées dans le vecteur $\mathbf{y^A}$ (`yA` en `R`) et pour lequel `mean(yA)` $=0.171$?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $p^A = 15\%$ vs $\mathbf{H_1}$: $p^A > 15\%$

Statistique de test sous $\mathbf{H_0}$:

$$\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right) \overset{approx.}{\leadsto} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

Règle de Décision :

$$\text{Accepter } \mathbf{H_1} \text{ si } \widehat{p^A}\left(\mathbf{y^A}\right) > p_{lim,\alpha}$$

Décision pour le Produit A

Question : Comment conclueriez-vous au vu des données de l'industriel stockées dans le vecteur $\mathbf{y^A}$ (yA en R) et pour lequel $\texttt{mean(yA)} = 0.171$?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $p^A = 15\%$ vs **$\mathbf{H_1}$** : $p^A > 15\%$

Statistique de test sous $\mathbf{H_0}$:

$$\widehat{p^A}\left(\mathbf{Y^A}\right) \overset{approx.}{\leadsto} \mathcal{N}(15\%, \sqrt{\frac{15\% \times 85\%}{n}})$$

Règle de Décision :

$$\text{Accepter } \mathbf{H_1} \text{ si } \widehat{p^A}\left(\mathbf{y^A}\right) > p_{lim,\alpha}$$

Conclusion : Au vu des données, puisque

$$\widehat{p^A}\left(\mathbf{y^A}\right) = 17.1\% > p_{lim,5\%} \simeq 16.8573\%$$

on peut plutôt penser que le produit A est rentable.

(avec $p_{lim,5\%} \overset{R}{=} \texttt{qnorm}(.95, .15, \texttt{sqrt}(.15 * .85/1000)))$

Décision pour le Produit B

Même démarche (accélérée) : Les valeurs des cases ci-dessous correspondent à : $P_{\mu^B=\mu}(\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y^B}) > \mu_{lim}) \simeq \overline{\left(\widehat{\mu^B}\left(\mathbf{y^B_{[\cdot]}}\right) > \mu_{lim}\right)}_{10000}$ obtenues grâce à la connaissance du mathématicien suivante

$$\widehat{\mu^B}(\mathbf{Y^B}) \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(\mu^B, \sigma_{\widehat{\mu^B}}) \text{ où } \sigma_{\widehat{\mu^B}} = \frac{\sigma_B}{\sqrt{n}}$$

μ	μ_{lim} 0.15	0.17	0.20
0.1	0.01% $\simeq$ 0.01%	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
0.14	23.39% $\simeq$ 24.38%	1.74% $\simeq$ 1.86%	0.01% $\simeq$ 0%
0.15	47.92% $\simeq$ 50%	7.72% $\simeq$ 8.6%	0.04% $\simeq$ 0.03%
0.16	74.24% $\simeq$ 74.07%	23.45% $\simeq$ 25.93%	0.39% $\simeq$ 0.49%
0.20	99.96% $\simeq$ 99.98%	97.81% $\simeq$ 98.3%	48.43% $\simeq$ 50%

Décision pour le Produit B

Même démarche (accélérée) : On ne cherche donc qu'à contrôler le risque de 1ère espèce dans **la pire des situations**, i.e. $\mathbf{H_0}$: $\mu^B = 0.15$.
Question : Comment ajuster μ_{lim} de manière à ne produire qu'un risque maximal de 1ère espèce à $\alpha = 5\%$?

μ	μ_{lim} 0.15	0.17	0.20
0.1	$0.01\% \simeq 0.01\%$	$0\% \simeq 0\%$	$0\% \simeq 0\%$
0.14	$23.39\% \simeq 24.38\%$	$1.74\% \simeq 1.86\%$	$0.01\% \simeq 0\%$
0.15	$47.92\% \simeq 50\%$	$7.72\% \simeq 8.6\%$	$0.04\% \simeq 0.03\%$
0.16	$74.24\% \simeq 74.07\%$	$23.45\% \simeq 25.93\%$	$0.39\% \simeq 0.49\%$
0.20	$99.96\% \simeq 99.98\%$	$97.81\% \simeq 98.3\%$	$48.43\% \simeq 50\%$

Décision pour le Produit B

Réponse :

$$\mu_{lim} \overset{\mathrm{R}}{=} \texttt{qnorm}(.95, .15, \texttt{sqrt}(\texttt{varB015/n})) \simeq 0.1740846$$

μ	μ_{lim} 0.15	0.1740846	0.2
0.1	$0.01\% \simeq 0.01\%$	$0\% \simeq 0\%$	$0\% \simeq 0\%$
0.14	$23.39\% \simeq 24.38\%$	$0.94\% \simeq 0.9\%$	$0.01\% \simeq 0\%$
0.15	$47.92\% \simeq 50\%$	$4.63\% \simeq 5\%$	$0.04\% \simeq 0.03\%$
0.16	$74.24\% \simeq 74.07\%$	$16.04\% \simeq 18.16\%$	$0.39\% \simeq 0.49\%$
0.20	$99.96\% \simeq 99.98\%$	$95.74\% \simeq 96.64\%$	$48.43\% \simeq 50\%$

Décision pour le Produit B

L'urne $U^A_{0.15}$ est une pire situation potentielle pour le produit B ainsi que beaucoup d'autres (à décrire). Par conséquent, $\mu_{lim,5\%}$ peut prendre les valeurs 0.1740846, 0.168573 ainsi que beaucoup d'autres (le plus grand à 3 boules max est 0.1840091) $\Rightarrow$ **ECHEC !**

μ	$\mu_{lim,5\%}$ 0.168573 ($U^A_{0.15}$)	0.1740846 ($U^B_{0.15}$)
0.1	0% $\simeq$ 0%	0% $\simeq$ 0%
0.14	0.52% $\simeq$ 0.46%	0.94% $\simeq$ 0.9%
0.15	5.17% $\simeq$ 5%	4.63% $\simeq$ 5%
0.16	22.89% $\simeq$ 22.98%	16.04% $\simeq$ 18.16%
0.1	99.35% $\simeq$ 99.35%	95.74% $\simeq$ 96.64%

Décision pour le Produit B

mais pas MATH ! : en effet, $\widehat{\mu^B}\left(\mathbf{Y^B}\right) \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0.15, \frac{\sigma_B}{\sqrt{n}})$ sous $\mathbf{H_0}$.

Heureusement, $\mathbf{H_1}$: $\mu^B > 0.15 \Leftrightarrow \delta_{\mu^B,0.15} := \frac{\mu^B - 0.15}{\sigma_B/\sqrt{n}} > 0$

estimé par $\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{Y^B}\right) := \frac{\widehat{\mu^B}\left(\mathbf{Y^B}\right) - 0.15}{\widehat{\sigma_B}\left(\mathbf{Y^B}\right)/\sqrt{n}} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0, 1)$ sous $\mathbf{H_0}$.

μ	δ_{lim} 0	1.6449	1.96
0.1	0.01% $\simeq$???	0% $\simeq$???	0% $\simeq$???
0.14	100% $\simeq$???	0% $\simeq$???	0% $\simeq$???
0.15	47.92% $\simeq$ 50%	3.66% $\simeq$ 5%	1.73% $\simeq$ 2.5%
0.16	74.24% $\simeq$???	53.52% $\simeq$???	50.9% $\simeq$???
0.20	99.96% $\simeq$???	96.46% $\simeq$???	92.45% $\simeq$???

Décision pour le Produit B

mais pas MATH ! : La Règle de Décision peut donc se formuler :

$$\text{Accepter } \mathbf{H_1} \text{ si } \widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{y^B}\right) > \delta_{lim,\alpha} \stackrel{\mathsf{R}}{=} \texttt{qnorm}(1-\alpha)$$

de sorte que le risque maximal de 1ère espèce soit fixé à (urne $U^B_{0.15}$)

$$\alpha \simeq P_{\mu^B=0.15}\left(\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{Y^B}\right) > \delta_{lim,\alpha}\right) = \overline{\left(\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{y^B_{[\cdot]}}\right) > \delta_{lim,\alpha}\right)}_{\infty}.$$

μ	δ_{lim}: 0	1.6449	1.96
0.1	0.01% $\simeq$???	0% $\simeq$???	0% $\simeq$???
0.14	100% $\simeq$???	0% $\simeq$???	0% $\simeq$???
0.15	47.92% $\simeq$ 50%	3.66% $\simeq$ 5%	1.73% $\simeq$ 2.5%
0.16	74.24% $\simeq$???	53.52% $\simeq$???	50.9% $\simeq$???
0.20	99.96% $\simeq$???	96.46% $\simeq$???	92.45% $\simeq$???

Décision pour le Produit B

mais pas MATH ! : De plus, le résultat :

$$\alpha \simeq P_{\mu^B=0.15}(\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}(\mathbf{Y^B}) > \delta_{lim,\alpha}) = \overline{\left(\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{y^B_{[\cdot]}}\right) > \delta_{lim,\alpha}\right)}_{\infty}$$

est valide pour tout type d'urne potentielle pour le produit B comme le montre les résultats ci-dessous pour les urnes $U^A_{0.15}$ et $U^B_{0.15}$.

μ	$\delta_{lim,5\%}$ 1.644854 $(U^A_{0.15})$	$\delta_{lim,5\%}$ 1.644854 $(U^B_{0.15})$
0.1	0% $\simeq$???	0% $\simeq$???
0.14	0.39% $\simeq$???	0% $\simeq$???
0.15	4.39% $\simeq$ 5%	3.66% $\simeq$ 5%
0.16	20.15% $\simeq$???	53.52% $\simeq$???
0.1	99.2% $\simeq$???	96.46% $\simeq$???

Décision pour le Produit B

Question : Comment s'écrit l'assertion d'intérêt $\mathbf{H_1}$ en fonction du paramètre d'intérêt et en fonction du paramètre d'écart standardisé ?

Décision pour le Produit B

Question : Comment s'écrit l'assertion d'intérêt $\mathbf{H_1}$ en fonction du paramètre d'intérêt et en fonction du paramètre d'écart standardisé ?
Réponse : $\mathbf{H_1}$: $\mu^B > 0.15 \Leftrightarrow \delta_{\mu^B,0.15} := \frac{\mu^B - 0.15}{\sigma_{\widehat{\mu^B}}} > 0$

avec $\sigma_{\widehat{\mu^B}} = \frac{\sigma_B}{\sqrt{n}}$.

Hypothèses de test : $\mathbf{H_1}$: $\mu^B > 0.15$

Décision pour le Produit B

Question : Quelle est la pire des situations, i.e. parmi toutes les situations quelle est celle qui engendre le plus grand risque d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : **H$_1$** : $\mu^B > 0.15$

Décision pour le Produit B

Question : Quelle est la pire des situations, i.e. parmi toutes les situations quelle est celle qui engendre le plus grand risque d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $\mu^B = 0.15$ vs $\mathbf{H_1}$: $\mu^B > 0.15$

Décision pour le Produit B

Question : Quelle est l'information du mathématicien quant au comportement de $\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{Y^B}\right)$ dans la pire des situations ?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $\mu^B = 0.15$ vs $\mathbf{H_1}$: $\mu^B > 0.15$

Décision pour le Produit B

Question : Quelle est l'information du mathématicien quant au comportement de $\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{Y^B}\right)$ dans la pire des situations ?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $\mu^B = 0.15$ vs $\mathbf{H_1}$: $\mu^B > 0.15$

Statistique de test sous $\mathbf{H_0}$:

$$\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{Y^B}\right) := \frac{\widehat{\mu^B}\left(\mathbf{Y^B}\right) - 0.15}{\sigma_{\widehat{\mu^B}}\left(\mathbf{Y^B}\right)} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$$

Décision pour le Produit B

Question : Comment s'écrit la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt ne produisant pas plus de 5% d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $\mu^B = 0.15$ vs $\mathbf{H_1}$: $\mu^B > 0.15$

Statistique de test sous $\mathbf{H_0}$:

$$\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{Y^B}\right) := \frac{\widehat{\mu^B}\left(\mathbf{Y^B}\right) - 0.15}{\widehat{\sigma_{\widehat{\mu^B}}}\left(\mathbf{Y^B}\right)} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$$

Décision pour le Produit B

Question : Comment s'écrit la règle de décision en faveur de l'assertion d'intérêt ne produisant pas plus de 5% d'erreur de première espèce ?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0} : \mu^B = 0.15$ vs $\mathbf{H_1} : \mu^B > 0.15$

Statistique de test sous $\mathbf{H_0}$:

$$\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{Y^B}\right) := \frac{\widehat{\mu^B}\left(\mathbf{Y^B}\right) - 0.15}{\widehat{\sigma_{\widehat{\mu^B}}}\left(\mathbf{Y^B}\right)} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$$

Règle de Décision :

$$\text{Accepter } \mathbf{H_1} \text{ si } \widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{y^B}\right) > \delta_{lim,\alpha}$$

Décision pour le Produit B

Question : Comment concluerieriez-vous au vu des données de l'industriel stockées dans le vecteur $\mathbf{y^B}$ (yB en R) et pour lequel `mean(yB)` $= 0.172$ et `sd(yB)` $= 0.5610087$?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $\mu^B = 0.15$ vs $\mathbf{H_1}$: $\mu^B > 0.15$

Statistique de test sous $\mathbf{H_0}$:

$$\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{Y^B}\right) := \frac{\widehat{\mu^B}\left(\mathbf{Y^B}\right) - 0.15}{\sigma_{\widehat{\mu^B}}\left(\mathbf{Y^B}\right)} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$$

Règle de Décision :

$$\text{Accepter } \mathbf{H_1} \text{ si } \widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{y^B}\right) > \delta_{lim,\alpha}$$

Décision pour le Produit B

Question : Comment concluer iez-vous au vu des données de l'industriel stockées dans le vecteur $\mathbf{y^B}$ (yB en R) et pour lequel $\texttt{mean(yB)} = 0.172$ et $\texttt{sd(yB)} = 0.5610087$?

Hypothèses de test : $\mathbf{H_0}$: $\mu^B = 0.15$ vs $\mathbf{H_1}$: $\mu^B > 0.15$

Statistique de test sous $\mathbf{H_0}$:

$$\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{Y^B}\right) := \frac{\widehat{\mu^B}\left(\mathbf{Y^B}\right) - 0.15}{\sigma_{\widehat{\mu^B}}\left(\mathbf{Y^B}\right)} \overset{approx.}{\leadsto} \mathcal{N}(0,1)$$

Règle de Décision :

$$\text{Accepter } \mathbf{H_1} \text{ si } \widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{y^B}\right) > \delta_{lim,\alpha}$$

Conclusion : Au vu des données, puisque

$$\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{y^B}\right) = 1.24009 \not> \delta_{lim,5\%} \overset{\text{R}}{=} \texttt{qnorm(.95)} \simeq 1.644854$$

on NE peut PAS plutôt penser que le produit B est rentable.

(avec $\widehat{\delta_{\mu^B,0.15}}\left(\mathbf{y^B}\right) \overset{\text{R}}{=} \texttt{(mean(yB) - 0.15)/sqrt(var(yB)/n)}$)