Cours de Statistiques Inférentielles

CQLS : cqls@upmf-grenoble.fr

7 février 2019

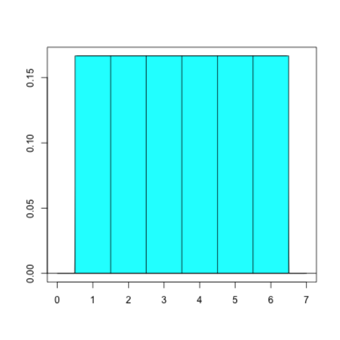
Plan

1. Loi de probabilité d'une v.a. Y
2. Loi de probabilité d'une moyenne $\overline{Y}$
3. Estimation : Obtention et Qualité
4. Intervalle de confiance

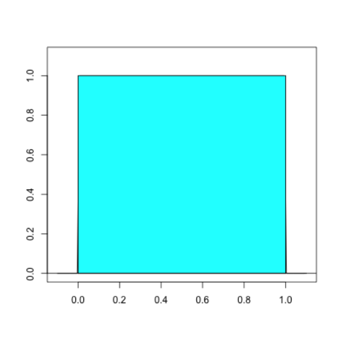
Loi de probabilité d'une v.a. Y

Résultat A.M.P.	Décodage via A.E.P.
$Y \rightsquigarrow \mathcal{L}_0$ ou $Y \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{L}_0$	**Tous les résultats** $(y_{[.]})_{+\infty}$ de Y sont représentés graphiquement par des $[+\infty]$-**briques** (discrètes ou continues) s'empilant pour former un $[+\infty]$-**histogramme** (discret ou continu), dont la forme est donnée par $\mathcal{L}_0$, décrivant (approx.) la **répartition** des $(y_{[.]})_{+\infty}$.

Loi de probabilité d'une v.a. Y

Résultat A.M.P.	**Décodage via A.E.P.**
$Y \leadsto \mathcal{L}_0$ ou $Y \overset{approx.}{\leadsto} \mathcal{L}_0$	**Tous les résultats** $(y_{[.]})_{+\infty}$ de Y sont représentés graphiquement par des $[+\infty]$-**briques** (discrètes ou continues) s'empilant pour former un $[+\infty]$-**histogramme** (discret ou continu), dont la forme est donnée par $\mathcal{L}_0$, décrivant (approx.) la **répartition** des $(y_{[.]})_{+\infty}$.
$Y \leadsto \mathcal{U}(\{1, \cdots, 6\})$	 **Moyenne** $\overline{(y_{[\cdot]})}_{+\infty} = \mathbf{E}(Y) = 3.5$ **Ecart-type** $\overleftrightarrow{(y_{[\cdot]})}_{+\infty} = \sigma(Y) = 1.71$

Loi de probabilité d'une v.a. Y

<table>
<tr><th>Résultat A.M.P.</th><th>Décodage via A.E.P.</th></tr>
<tr><td>$Y \leadsto \mathcal{L}_0$
ou
$Y \overset{approx.}{\leadsto} \mathcal{L}_0$</td><td>Tous les résultats $(y_{[.]})_{+\infty}$ de Y sont représentés graphiquement par des $[+\infty]$-briques (discrètes ou continues) s'empilant pour former un $[+\infty]$-histogramme (discret ou continu), dont la forme est donnée par $\mathcal{L}_0$, décrivant (approx.) la répartition des $(y_{[.]})_{+\infty}$.</td></tr>
<tr><td>$Y \leadsto \mathcal{U}([0,1]])$</td><td>

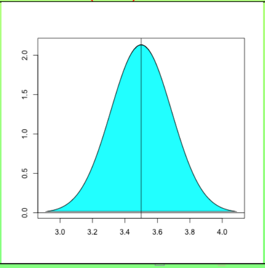
Moyenne
$\overline{(y_{[\cdot]})}_{+\infty} = \mathbf{E}(Y)$
$= 0.5$
Ecart-type
$\overleftrightarrow{(y_{[\cdot]})}_{+\infty} = \sigma(Y)$
$= 0.29$</td></tr>
</table>

Plan

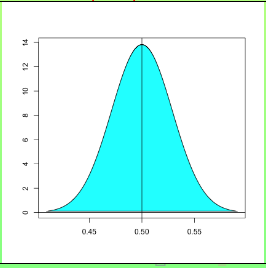
Loi de probabilité (universelle) d'une moyenne $\overline{Y}$

Résultat A.M.P.	Décodage via A.E.P.
Si $Y_i \rightsquigarrow \mathcal{L}_0$ alors $\boxed{\overline{Y} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(\mu, \sigma_{\overline{Y}})}$ où $\mu = \mathbf{E}(Y_i)$ est le paramètre d'intérêt (INCONNU)	**Tous les résultats** $(\overline{y}_{[.]})_{+\infty}$ de $\overline{Y}$ sont représentés graphiquement par des $[+\infty]$-**briques** (approx.) continues s'empilant pour former un $[+\infty]$-**histogramme** (approx.) continu, dont la forme est donnée par $\mathcal{L}_0$, décrivant (approx.) la **répartition** des $(\overline{y}_{[.]})_{+\infty}$.
$\mathbf{E}(\overline{Y}) = \mathbf{E}(Y_i) = \mu$	$\overline{(\overline{y}_{[.]})}_{+\infty} = \mu$
$\sigma_{\overline{Y}} \overset{\text{Not.}}{=} \sigma(\overline{Y}) = \sigma(Y_i)/\sqrt{n}$	$\sigma_{\overline{Y}} = \left(\overline{y}_{[\cdot]}\right)_{\infty}$

Loi de probabilité (universelle) d'une moyenne $\overline{Y}$

Résultat A.M.P.	**Décodage via A.E.P.**
Si $Y_i \leadsto \mathcal{L}_0$ alors $\boxed{\overline{Y} \overset{approx.}{\leadsto} \mathcal{N}(\mu, \sigma_{\overline{Y}})}$ où $\mu = \mathbf{E}(Y_i)$ est le paramètre d'intérêt (INCONNU)	**Tous les résultats** $(\overline{y}_{[.]})_{+\infty}$ de $\overline{Y}$ sont représentés graphiquement par des $[+\infty]$-**briques** (approx.) continues s'empilant pour former un $[+\infty]$-**histogramme** (approx.) continu, dont la forme est donnée par $\mathcal{L}_0$, décrivant (approx.) la **répartition** des $(\overline{y}_{[.]})_{+\infty}$.
$\mathbf{E}(\overline{Y}) = \mathbf{E}(Y_i) = \mu$	$\overline{(\overline{y}_{[.]})}_{+\infty} = \mu = 3.5$
$\sigma_{\overline{Y}} \overset{\text{Not.}}{=} \sigma(\overline{Y}) = \sigma(Y_i)/\sqrt{n}$	$\sigma_{\overline{Y}} = \overleftrightarrow{\left(\overline{y}_{[\cdot]}\right)_{\infty}} = 0.42$
Si (on savait) $Y_i \leadsto \mathcal{U}(\{1, \cdots, 6\})$ alors $\boxed{\overline{Y} \overset{approx.}{\leadsto} \mathcal{N}(3.5, 0.42)}$	

Loi de probabilité (universelle) d’une moyenne $\overline{Y}$

Résultat A.M.P.	**Décodage via A.E.P.**
Si $Y_i \rightsquigarrow \mathcal{L}_0$ alors $\boxed{\overline{Y} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(\mu, \sigma_{\overline{Y}})}$ où $\mu = \mathbf{E}(Y_i)$ est le paramètre d’intérêt (INCONNU)	**Tous les résultats** $(\overline{y}_{[.]})_{+\infty}$ de $\overline{Y}$ sont représentés graphiquement par des $[+\infty]$-**briques** (approx.) continues s’empilant pour former un $[+\infty]$-**histogramme** (approx.) continu, dont la forme est donnée par $\mathcal{L}_0$, décrivant (approx.) la **répartition** des $(\overline{y}_{[.]})_{+\infty}$.
$\mathbf{E}(\overline{Y}) = \mathbf{E}(Y_i) = \mu$	$\overline{\left(\overline{y}_{[.]}\right)}_{+\infty} = \mu = 0.5$
$\sigma_{\overline{Y}} \overset{\text{Not.}}{=} \sigma(\overline{Y}) = \sigma(Y_i)/\sqrt{n}$	$\sigma_{\overline{Y}} = \left(\overline{y}_{[\cdot]}\right)_{\infty} = 0.03$
Si (on savait) $Y_i \rightsquigarrow \mathcal{U}([0,1]])$ alors $\boxed{\overline{Y} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0.5, 0.03)}$	

Plan

Problématique du Salaire Juste

Enoncé

- Une équipe de sociologues propose de réunir un comité d'experts pour la création d'un indicateur, appelé **Salaire Juste**, mesuré pour toute personne active et qui permettra de transformer les ressources individuelles réelles (souvent mesurées par un salaire) en tenant compte de critères aussi importants que les ressources locales, le partage de ces ressources, la pénibilité du travail, le niveau d'expérience, d'expertise et bien d'autres encore.
- Cet indicateur est conçu de sorte qu'en théorie il devrait être équivalent (en fait égale à une valeur étalon 100) pour tout personne active dans le monde.
- Après quelques mois de travail, un premier prototype (très perfectible) du **Salaire Juste** est élaboré par la fine équipe d'experts.

Problématique du Salaire Juste

Critère de pays civilisé

Les sociologues s'accordent à dire qu'un pays peut se dire non civilisé si :

1. **Discrimination Mondiale** : le Salaire Juste moyen dans le pays est très supérieur à la valeur 100 de base. Un Salaire Juste moyen excédant un seuil de 150 est considéré comme intolérable.
2. **Discrimination Intérieure** : les Salaires Justes dans le pays sont très dispersés. La variance des Salaires Justes dans le pays supérieur à 30 est considérée comme excessive et donc anormale.

Problématique du Salaire Juste

Mesures de discrimination

Les experts sont aussi conseillés par des statisticiens pour proposer les mesures de discrimination au niveau du pays et mondialement. $\mathcal{Y}_i^J$ désigne le Salaire Juste du $i^{ème}$ individu parmi les N personnes actives du pays. Y^J correspond au Salaire Juste d'un individu choisi au hasard.

1. **Discrimination Mondiale** : le Salaire Juste moyen s'écrit :

$$\mu^J = \overline{(\mathcal{Y}^J)}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathcal{Y}_i^J = \mathbb{E}\left(Y^J\right)$$

2. **Discrimination Intérieure** : la variance des Salaires Justes s'écrit :

$$\sigma_J^2 = \left(\overleftrightarrow{(\mathcal{Y}^J)}_N\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathcal{Y}_i^J - \overline{(\mathcal{Y}^J)}_N\right)^2 = \mathbb{V}ar\left(Y^J\right)$$

Estimation

Les paramètres (d'intérêt) μ^J et σ_J^2 (appelé, $\theta^\bullet$ dans un cadre général) sont donc supposés **inconnus** car la taille N de la population est trop grande. Proposez les estimations ?

Estimation

Les paramètres (d'intérêt) μ^J et σ_J^2 (appelé, $\theta^\bullet$ dans un cadre général) sont donc supposés **inconnus** car la taille N de la population est trop grande. Proposez les estimations ?

Future estimation $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y})$: (à partir d'un futur échantillon $\mathbf{Y}$)

$$\widehat{\mu^J}(\mathbf{Y}) := \overline{(Y)}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$$

et

$$\widehat{\sigma_J^2}(\mathbf{Y}) := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{(Y)}_n\right)^2$$

Estimation

Les paramètres (d'intérêt) μ^J et σ_J^2 (appelé, $\theta^\bullet$ dans un cadre général) sont donc supposés **inconnus** car la taille N de la population est trop grande. Proposez les estimations ?

Estimation $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y})$ du Jour J : (à partir de l'échantillon **y** du Jour J)

$$\widehat{\mu^J}(\mathbf{y}) := \overline{(y)}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

et

$$\widehat{\sigma_J^2}(\mathbf{y}) := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{(y)}_n\right)^2$$

Estimation

Les paramètres (d'intérêt) μ^J et σ_J^2 (appelé, $\theta^\bullet$ dans un cadre général) sont donc supposés **inconnus** car la taille N de la population est trop grande. Proposez les estimations ?

Estimations potentielles $\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[k]}}\right)$: (à partir d'échantillons $\mathbf{y_{[k]}}$)

$$\widehat{\mu^J}\left(\mathbf{y_{[k]}}\right) := \overline{\left(y_{[k]}\right)}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{i,[k]}$$

et

$$\widehat{\sigma_J^2}\left(\mathbf{y_{[k]}}\right) := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_{i,[k]} - \overline{\left(y_{[k]}\right)}_n\right)^2$$

Qualité

Quelles sont les qualités souhaitables pour l'estimation d'un paramètre d'intérêt ? Pouvez-vous les traduire à partir des m estimations potentielles ? (*N.B. : l'estimation du jour J est choisi parmi celles-ci*)

Qualité

Quelles sont les qualités souhaitables pour l'estimation d'un paramètre d'intérêt ? Pouvez-vous les traduire à partir des m estimations potentielles ? (*N.B. : l'estimation du jour J est choisi parmi celles-ci*)

- **Autour du paramètre** : leur moyenne égale au paramètre inconnu $\theta^\bullet$ (**A.M.P. :** estimateur sans biais)
$$\overline{\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[\cdot]}\right)\right)}_m \simeq \overline{\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[\cdot]}\right)\right)}_\infty = \mathbb{E}\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{Y}\right)\right) = \theta^\bullet$$
- **Faible dispersion** : leur écart-type (ou variance) d'autant plus petit que n grandit (**A.M.P. :** estimateur convergent)
$$\overleftrightarrow{\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[\cdot]}\right)\right)}_m \simeq \overleftrightarrow{\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[\cdot]}\right)\right)}_\infty = \sigma(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{Y}\right)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Qualité

Quelles sont les qualités souhaitables pour l'estimation d'un paramètre d'intérêt ? Pouvez-vous les traduire à partir des m estimations potentielles ? (*N.B. : l'estimation du jour J est choisi parmi celles-ci*)

- **Autour du paramètre** : leur moyenne égale au paramètre inconnu $\theta^\bullet$ (**A.M.P. :** estimateur sans biais)

$$\overline{\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[\cdot]}\right)\right)}_m \simeq \overline{\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[\cdot]}\right)\right)}_\infty = \mathbb{E}\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{Y}\right)\right) = \theta^\bullet$$

- **Faible dispersion** : leur écart-type (ou variance) d'autant plus petit que n grandit (**A.M.P. :** estimateur convergent)

$$\overleftrightarrow{\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[\cdot]}\right)\right)}_m \simeq \overleftrightarrow{\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[\cdot]}\right)\right)}_\infty = \sigma(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{Y}\right)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Qualité

Quelles sont les qualités souhaitables pour l'estimation d'un paramètre d'intérêt ? Pouvez-vous les traduire à partir des m estimations potentielles ? (*N.B. : l'estimation du jour J est choisi parmi celles-ci*)

- **Autour du paramètre** : leur moyenne égale au paramètre inconnu $\theta^\bullet$ (**A.M.P. :** estimateur sans biais)
$$\overline{\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[\cdot]}\right)\right)}_m \simeq \overline{\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[\cdot]}\right)\right)}_\infty = \mathbb{E}\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{Y}\right)\right) = \theta^\bullet$$
- **Faible dispersion** : leur écart-type (ou variance) d'autant plus petit que n grandit (**A.M.P. :** estimateur convergent)
$$\overleftrightarrow{\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[\cdot]}\right)\right)}_m \simeq \overleftrightarrow{\left(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[\cdot]}\right)\right)}_\infty = \sigma(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{Y}\right)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow$ **Pb** : qualité d'estimation $\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}} := \sigma(\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{Y}\right))$ est un paramètre **inconnu** ! Peut-on espérer l'estimer à partir de l'échantillon $\mathbf{y}$?

Erreur standard

Les statisticiens (mathématiciens) proposent généralement l'estimation $\widehat{\theta}(\mathbf{y})$ d'un paramètre inconnu $\theta^\bullet$ accompagnée de l'estimation $\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y})$ de sa qualité $\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}$.

(Voir le tableau dans votre caisse à outils pour la liste de toutes les erreurs standard associées aux différents paramètres !)

Pour illustrer comment cela est possible, étudions le paramètre moyenne $\mu^\bullet$:

$$\sigma_{\widehat{\mu^\bullet}} = \frac{\sigma_\bullet}{\sqrt{n}}$$

Erreur standard

Les statisticiens (mathématiciens) proposent généralement l'estimation $\widehat{\theta}(\mathbf{y})$ d'un paramètre inconnu $\theta^\bullet$ accompagnée de l'estimation $\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y})$ de sa qualité $\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}$.

(Voir le tableau dans votre caisse à outils pour la liste de toutes les erreurs standard associées aux différents paramètres !)

Pour illustrer comment cela est possible, étudions le paramètre moyenne $\mu^\bullet$:

$$\sigma_{\widehat{\mu^\bullet}} = \frac{\sigma_\bullet}{\sqrt{n}} \text{ estimé par } \widehat{\sigma_{\widehat{\mu^\bullet}}}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\sigma_\bullet}(\mathbf{Y})}{\sqrt{n}}$$

Mesure d'écart standardisé

Objectif : Etude de la loi de l'écart $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet$ (potentiellement, fort utile pour construction d'outils statistiques)

$\mathbf{Y}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})$
$\mathbf{y_{[1]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[1]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[1]}})$
$\mathbf{y_{[2]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[2]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[2]}})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{y_{[m-1]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m-1]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[m-1]}})$
$\mathbf{y_{[m]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[m]}})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Mesure d'écart standardisé

Problème : Loi de $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet$ généralement inconnue car dépendant d'un paramètre de nuisance inconnu $\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}$.

$\mathbf{Y}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet$
$\mathbf{y_{[1]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[1]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[1]}})$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[1]}}) - \theta^\bullet$
$\mathbf{y_{[2]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[2]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[2]}})$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[2]}}) - \theta^\bullet$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{y_{[m-1]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m-1]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[m-1]}})$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m-1]}}) - \theta^\bullet$
$\mathbf{y_{[m]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[m]}})$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m]}}) - \theta^\bullet$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Loi $(n \geq 30)$	$\mathcal{N}(\theta^\bullet, \sigma_{\widehat{\theta^\bullet}})$		$\mathcal{N}(0, \sigma_{\widehat{\theta^\bullet}})$

Mesure d'écart standardisé

La solution : La loi de l'écart standardisé (centrage et réduction)

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) := \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$$

$\mathbf{Y}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})$
$\mathbf{y_{[1]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[1]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[1]}})$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[1]}}) - \theta^\bullet$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[1]}})$
$\mathbf{y_{[2]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[2]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[2]}})$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[2]}}) - \theta^\bullet$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[2]}})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{y_{[m-1]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m-1]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[m-1]}})$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m-1]}}) - \theta^\bullet$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m-1]}})$
$\mathbf{y_{[m]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[m]}})$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m]}}) - \theta^\bullet$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m]}})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Loi ($n \geq 30$)	$\mathcal{N}(\theta^\bullet, \sigma_{\widehat{\theta^\bullet}})$		$\mathcal{N}(0, \sigma_{\widehat{\theta^\bullet}})$	$\mathcal{N}(0,1)$

Mesure d'écart standardisé

La solution : La loi de l'écart standardisé (centrage et réduction)

$$\delta_{\widehat{\mu^J},\mu^J}(\mathbf{Y}) := \frac{\widehat{\mu^J}(\mathbf{Y}) - \mu^J}{\widehat{\sigma_{\widehat{\mu^J}}}(\mathbf{Y})} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1) \text{ avec } \widehat{\sigma_{\widehat{\mu^J}}}(\mathbf{Y}) := \frac{\widehat{\sigma_J}(\mathbf{Y})}{\sqrt{n}}$$

$\mathbf{Y}$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\mu^J}}}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{Y}) - \mu^J$	$\delta_{\widehat{\mu^J},\mu^J}(\mathbf{Y})$
$\mathbf{y_{[1]}}$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{y_{[1]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\mu^J}}}(\mathbf{y_{[1]}})$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{y_{[1]}}) - \mu^J$	$\delta_{\widehat{\mu^J},\mu^J}(\mathbf{y_{[1]}})$
$\mathbf{y_{[2]}}$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{y_{[2]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\mu^J}}}(\mathbf{y_{[2]}})$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{y_{[2]}}) - \mu^J$	$\delta_{\widehat{\mu^J},\mu^J}(\mathbf{y_{[2]}})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{y_{[m-1]}}$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{y_{[m-1]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\mu^J}}}(\mathbf{y_{[m-1]}})$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{y_{[m-1]}}) - \mu^J$	$\delta_{\widehat{\mu^J},\mu^J}(\mathbf{y_{[m-1]}})$
$\mathbf{y_{[m]}}$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{y_{[m]}})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\mu^J}}}(\mathbf{y_{[m]}})$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{y_{[m]}}) - \mu^J$	$\delta_{\widehat{\mu^J},\mu^J}(\mathbf{y_{[m]}})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Loi ($n \geq 30$)	$\mathcal{N}(\mu^J, \sigma_{\widehat{\mu^J}})$		$\mathcal{N}(0, \sigma_{\widehat{\mu^J}})$	$\mathcal{N}(0,1)$

Mesure d'écart standardisé

Application : Salaire Juste avec population fictive fixée expérimentalement à $\mu^J = 100$ et $\sigma_J = 10$ avec taille d'échantillon $n = 1000$.

$\mathbf{Y}$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\sigma_J}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\mu^J}}}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{Y}) - \mu^J$	$\delta_{\widehat{\mu^J},\mu^J}(\mathbf{Y})$
$\mathbf{y_{[1]}}$	99.91	10.0231	0.317	-0.09	-0.29
$\mathbf{y_{[2]}}$	99.65	9.2615	0.2929	-0.35	-1.19
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y en R	`mean(y)`	`sd(y)`	`seMean(y)`	`mean(y)-100`	`(mean(y)-100)/seMean(y)`
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{y_{[9999]}}$	100.2	9.9372	0.3142	0.2	0.63
$\mathbf{y_{[10000]}}$	99.94	9.7991	0.3099	-0.06	-0.21
mean	100.0043	10.034	0.3173	0.0043	-0.0294
sd	0.3178	0.63	0.0199	0.3178	1.0058

Mesure d'écart standardisé

Remarque : Chaque ligne du tableau serait un résultat possible pour le **jour J**. Observez notamment la 1ère et 3ème colonnes (estimations des paramètres μ^J et σ_J puis l'erreur standard pour μ^J) !

$\mathbf{Y}$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\sigma_J}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\sigma_{\widehat{\mu^J}}}(\mathbf{Y})$	$\widehat{\mu^J}(\mathbf{Y}) - \mu^J$	$\delta_{\widehat{\mu^J},\mu^J}(\mathbf{Y})$
$\mathbf{y}_{[1]}$	99.91	10.0231	0.317	-0.09	-0.29
$\mathbf{y}_{[2]}$	99.65	9.2615	0.2929	-0.35	-1.19
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y en R	`mean(y)`	`sd(y)`	`seMean(y)`	`mean(y)-100`	`(mean(y)-100)/seMean(y)`
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{y}_{[9999]}$	100.2	9.9372	0.3142	0.2	0.63
$\mathbf{y}_{[10000]}$	99.94	9.7991	0.3099	-0.06	-0.21
mean	100.0043	10.034	0.3173	0.0043	-0.0294
sd	0.3178	0.63	0.0199	0.3178	1.0058

A.E.P. ecart standardisé

Expérimentation : Relation entre A.E.P. et A.M.P sur

$$\Delta := \delta_{\widehat{\mu}^J,\mu^J}(\mathbf{Y}) := \frac{\widehat{\mu^J}(\mathbf{Y}) - \mu^J}{\widehat{\sigma_{\widehat{\mu^J}}}(\mathbf{Y})} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1)$$

$\overline{\left(\delta_{[\cdot]} < -3\right)}_m$	$\overline{\left(\delta_{[\cdot]} \in [-3,-1.5[\right)}_m$	$\overline{\left(\delta_{[\cdot]} \in [-1.5,-0.5]\right)}_m$	$\overline{\left(\delta_{[\cdot]} \in [-0.5,0.5[\right)}_m$
0.23%	7.4%	23.94%	37.55%
$\mathbb{P}(\Delta < -3)$	$\mathbb{P}(\Delta \in [-3,-1.5[)$	$\mathbb{P}(\Delta \in [-1.5,-0.5])$	$\mathbb{P}(\Delta \in [-0.5,0.5[)$
0.13%	6.55%	24.17%	38.29%

$\overline{\left(\delta_{[\cdot]} \in [0.5,1.5[\right)}_m$	$\overline{\left(\delta_{[\cdot]} \in [1.5,3[\right)}_m$	$\overline{\left(\delta_{[\cdot]} \geq 3\right)}_m$	$\overline{\left(\delta_{[\cdot]}\right)}_m$	$\overleftrightarrow{\left(\delta_{[\cdot]}\right)}_m$
25.05%	5.73%	0.1%	-0.0294	1.0058
$\mathbb{P}(\Delta \in [0.5,1.5[)$	$\mathbb{P}(\Delta \in [1.5,3[)$	$\mathbb{P}(\Delta \geq 3)$	$\mathbb{E}(\Delta)$	$\sigma(\Delta)$
24.17%	6.55%	0.13%	0	1

Plan

Motivation

Motivation

1. Quelle confiance accordez-vous à deux estimations obtenues à partir de 2 echantillons de tailles respectives $n = 5$ et $n = 1000$?

Motivation

1. Quelle confiance accordez-vous à deux estimations obtenues à partir de 2 echantillons de tailles respectives $n = 5$ et $n = 1000$?
2. Plus généralement, quelle confiance doit-on accorder à une estimation $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y})$ le **jour J** selon son erreur standard $\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y})$ plus ou moins grande.

Motivation

1. Quelle confiance accordez-vous à deux estimations obtenues à partir de 2 echantillons de tailles respectives $n = 5$ et $n = 1000$?
2. Plus généralement, quelle confiance doit-on accorder à une estimation $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y})$ le **jour J** selon son erreur standard $\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y})$ plus ou moins grande.
3. Interprétation des résultats d'un sondage avant le premier tour des élections présidentielles 2002 : Votre attitude aurait-elle été influencée si à la place d'une estimation $\widehat{p^J}(\mathbf{y})$ (autour de 17%) pour le candidat Jospin, on vous avait fourni une "fourchette" $[14.67\%, 19.33\%]$. Il paraît que cette information ne nous est pas fourni car les Français ne sauraient pas interpréter ce type de résultats. Qu'en pensez-vous ?

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$

Un Futur échantillon **Y** !

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ —— $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$

Une future estimation $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y})$

Sa future erreur standard $\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})$

*Construction Intervalle de Confiance et **A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ —— $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$

Une future estimation $\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(\theta^\bullet, \sigma_{\widehat{\theta^\bullet}})$ **inconnue**

Sa future erreur standard $\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y}) \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}, \sigma_{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}})$ **inconnue**

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$$\boxed{\mathbf{Y}} \;\text{———}\; \boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \;\text{———}\; \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$$

Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$$\boxed{\mathbf{Y}} \;\text{———}\; \boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \;\text{———}\; \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$$

Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

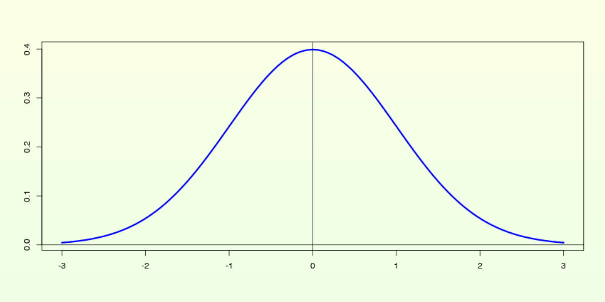
$$\boxed{\mathbf{Y}} \;\text{———}\; \boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \;\text{———}\; \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$$

Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$

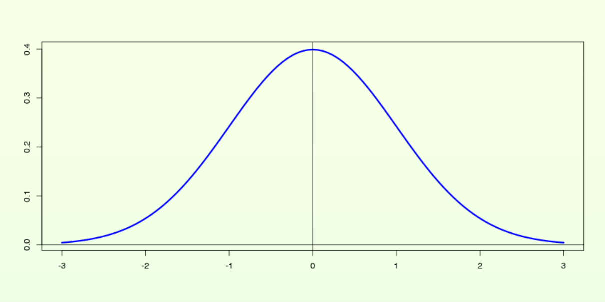


Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \overset{approx.}{\leadsto} \mathcal{N}(0,1) \text{ connue !}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$



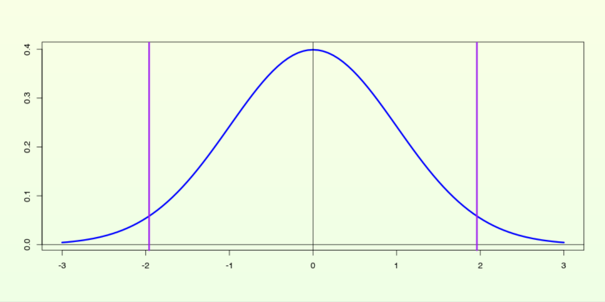
Future mesure d'écart standardisée :

$$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) = \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \overset{approx.}{\rightsquigarrow} \mathcal{N}(0,1) \text{ connue !}$$

$\rightarrow$ détermination de $[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]$?

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

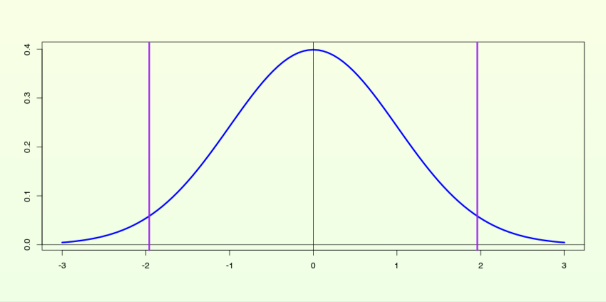
$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$



$$1-\alpha \simeq \mathbb{P}\left(-\delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}} \le \delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) \le \delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}}\right) \text{ avec } \delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}} \left\{ \begin{array}{l} = q_{1-\frac{\alpha}{2}}(\mathcal{N}(0,1)) \\ \simeq 1.96 \text{ si } \alpha = 5\% \end{array}\right.$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$



$$1 - \alpha \simeq \mathbb{P}\left(-\delta^{+}_{lim,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \theta^\bullet}{\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \leq \delta^{+}_{lim,\frac{\alpha}{2}} \right)$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$$\boxed{\mathbf{Y}} - \boxed{\widehat{\theta^{\bullet}}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^{\bullet}}}}(\mathbf{Y})} - \boxed{\delta_{\widehat{\theta^{\bullet}},\theta^{\bullet}}(\mathbf{Y})} \quad \boxed{[\widetilde{\theta^{\bullet}}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^{\bullet}}_{sup}(\mathbf{Y})]}$$

$$1-\alpha \simeq \mathbb{P}\left(-\delta^{+}_{lim,\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^{\bullet}}}}(\mathbf{Y}) \leq \widehat{\theta^{\bullet}}(\mathbf{Y}) - \color{red}{\theta^{\bullet}} \leq \delta^{+}_{lim,\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^{\bullet}}}}(\mathbf{Y})\right)$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ $\boxed{\left[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})\right]}$

$$1-\alpha \simeq \mathbb{P}\left(-\delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y}) \leq \theta^\bullet - \widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) \leq \delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})\right)$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$$\boxed{\mathbf{Y}} \;—\; \boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})} \;—\; \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})} \qquad \boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$$

$$1-\alpha \simeq \mathbb{P}\left(\underbrace{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) - \delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}_{\widetilde{\theta^\bullet}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{Y})} \leq \theta^\bullet \leq \underbrace{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}) + \delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}} \times \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}_{\widetilde{\theta^\bullet}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{Y})}\right)$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}),\widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$

$1^{ème}$ réalisation

$\boxed{\mathbf{y_{[1]}}}$

Construisons un premier échantillon $\mathbf{y_{[1]}}$!

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$

$1^{ème}$ réalisation

$\boxed{\mathbf{y_{[1]}}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[1]}\right)}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)]}$

L'intervalle de confiance calculé à partir de $\mathbf{y_{[1]}}$ est **"bon"** dans sa mission ssi

$$\boxed{\theta^\bullet \in [\widetilde{\theta^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widetilde{\theta^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)]} \Leftrightarrow \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[1]}}) \in [-\delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}}, \delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}}]}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$

$\boxed{\mathbf{y_{[1]}}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[1]}\right)}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)]}$

$2^{ème}$ réalisation

$\boxed{\mathbf{y_{[2]}}}$

Construisons un deuxième échantillon $\mathbf{y_{[2]}}$!

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}),\widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]$
$\mathbf{y_{[1]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[1]}\right)$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right),\widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)]$
$\mathbf{y_{[2]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right),\widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right)$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[2]}\right)$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right),\widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right)]$

2ème réalisation

L'intervalle de confiance calculé à partir de $\mathbf{y_{[2]}}$ est **"bon"** dans sa mission ssi

$$\boxed{\theta^\bullet \in [\widetilde{\theta^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right),\widetilde{\theta^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right)]} \Leftrightarrow \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[2]}}) \in [-\delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}},\delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}}]}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\boxed{\mathbf{Y}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]}$

$\boxed{\mathbf{y_{[1]}}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[1]}\right)}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[1]}}\right)]}$

$\boxed{\mathbf{y_{[2]}}}$ — $\boxed{\widehat{\theta^\bullet}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right)}$ — $\boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[2]}\right)}$ $\boxed{[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}\left(\mathbf{y_{[2]}}\right)]}$

$\vdots$

$m^{ème}$ réalisation

$\boxed{\mathbf{y_{[m]}}}$

Construisons un $m^{ème}$ échantillon $\mathbf{y_{[m]}}$!

*Construction Intervalle de Confiance et **A. E. P.***

$\mathbf{Y}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]$
$\mathbf{y_{[1]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[1]}}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[1]}})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[1]}\right)$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{y_{[1]}}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{y_{[1]}})]$
$\mathbf{y_{[2]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[2]}}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[2]}})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[2]}\right)$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{y_{[2]}}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{y_{[2]}})]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$m^{ème}$ réalisation			
$\mathbf{y_{[m]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m]}}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[m]}})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}\left(\mathbf{y}_{[m]}\right)$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{y_{[m]}}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{y_{[m]}})]$

L'intervalle de confiance calculé à partir de $\mathbf{y_{[m]}}$ est **"bon"** dans sa mission ssi

$$\boxed{\theta^\bullet \in [\widetilde{\theta^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y_{[m]}}), \widetilde{\theta^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y_{[m]}})]} \Leftrightarrow \boxed{\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m]}}) \in [-\delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}}, \delta^+_{lim,\frac{\alpha}{2}}]}$$

Construction Intervalle de Confiance et ***A. E. P.***

$\mathbf{Y}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{Y}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{Y})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{Y})$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{Y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{Y})]$
$\mathbf{y_{[1]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[1]}}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[1]}})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y}_{[1]})$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{y_{[1]}}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{y_{[1]}})]$
$\mathbf{y_{[2]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[2]}}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[2]}})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y}_{[2]})$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{y_{[2]}}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{y_{[2]}})]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{y_{[m]}}$	$\widehat{\theta^\bullet}(\mathbf{y_{[m]}}), \widehat{\sigma_{\widehat{\theta^\bullet}}}(\mathbf{y_{[m]}})$	$\delta_{\widehat{\theta^\bullet},\theta^\bullet}(\mathbf{y}_{[m]})$	$[\widetilde{\theta^\bullet}_{inf}(\mathbf{y_{[m]}}), \widetilde{\theta^\bullet}_{sup}(\mathbf{y_{[m]}})]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Interprétation par l'A.E.P. : nous imaginons disposer d'une infinité d'intervalles de confiance dont une proportion ($\simeq$) $1-\alpha$ (i.e. niveau de confiance) sont "bons", i.e. contiennent le paramètre $\theta^\bullet$ inconnu.

Obtention de $[\widetilde{\theta^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}), \widetilde{\theta^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y})]$ le jour J : équivalent à un choix au hasard d'un unique intervalle de confiance parmi cette infinité ! ! !

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

1. niveau de confiance $1 - \alpha = 100\%$:
   - $n = 10$: $[?, ?]$, $[?, ?]$, $[?, ?]$, $\cdots$
   - $n = 100$: $[?, ?]$, $[?, ?]$, $[?, ?]$, $\cdots$
   - $n = 1000$: $[?, ?]$, $[?, ?]$, $[?, ?]$, $\cdots$

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

1. niveau de confiance $1 - \alpha = 100\%$:
   - $n = 10$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

1. niveau de confiance $1-\alpha = 100\%$:
   - $n = 10$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
2. niveau de confiance $1-\alpha = 95\%$:
   - $n = 10$: $[-0.118, 0.718]$, $[-0.096, 0.296]$, $[-0.199, 0.999]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0.129, 0.311]$, $[0.077, 0.263]$, $[0.101, 0.319]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0.197, 0.263]$, $[0.185, 0.247]$, $[0.162, 0.222]$,$\cdots$
3. niveau de confiance $1-\alpha = 50\%$:
   - $n = 10$: $[0.156, 0.444]$, $[0.033, 0.167]$, $[0.194, 0.606]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0.189, 0.251]$, $[0.138, 0.202]$, $[0.173, 0.247]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0.219, 0.241]$, $[0.205, 0.227]$, $[0.182, 0.202]$,$\cdots$
4. niveau de confiance $1-\alpha = 10\%$:
   - $n = 10$: $[0.273, 0.327]$, $[0.087, 0.113]$, $[0.362, 0.438]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0.214, 0.226]$, $[0.164, 0.176]$, $[0.203, 0.217]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0.228, 0.232]$, $[0.214, 0.218]$, $[0.19, 0.194]$,$\cdots$

Qualité d'un I.C. : bon niveau de confiance + assez petit

1. niveau de confiance $1-\alpha = 100\%$:
   - $n = 10$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0, +\infty]$, $[0, +\infty]$,$[0, +\infty]$,$\cdots$
2. niveau de confiance $1-\alpha = 95\%$:
   - $n = 10$: $[-0.118, 0.718]$, $[-0.096, 0.296]$, $[-0.199, 0.999]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0.129, 0.311]$, $[0.077, 0.263]$, $[0.101, 0.319]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0.197, 0.263]$, $[0.185, 0.247]$, $[0.162, 0.222]$,$\cdots$
3. niveau de confiance $1-\alpha = 50\%$:
   - $n = 10$: $[0.156, 0.444]$, $[0.033, 0.167]$, $[0.194, 0.606]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0.189, 0.251]$, $[0.138, 0.202]$, $[0.173, 0.247]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0.219, 0.241]$, $[0.205, 0.227]$, $[0.182, 0.202]$,$\cdots$
4. niveau de confiance $1-\alpha = 10\%$:
   - $n = 10$: $[0.273, 0.327]$, $[0.087, 0.113]$, $[0.362, 0.438]$,$\cdots$
   - $n = 100$: $[0.214, 0.226]$, $[0.164, 0.176]$, $[0.203, 0.217]$,$\cdots$
   - $n = 1000$: $[0.228, 0.232]$, $[0.214, 0.218]$, $[0.19, 0.194]$,$\cdots$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	0.22	0.187	0.253	1
8	0.222	0.19	0.254	1
9	0.186	0.157	0.215	1
10	0.216	0.184	0.248	1
11	0.198	0.168	0.228	1
12	0.228	0.195	0.261	1
13	0.198	0.168	0.228	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$ Taux de succès=				95.14%

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
7231	0.235	0.2	0.27	0
7232	0.194	0.165	0.223	1
7233	0.192	0.165	0.219	1
7234	0.195	0.165	0.225	1
7235	0.18	0.151	0.209	1
7236	0.181	0.153	0.209	1
7237	0.191	0.161	0.221	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$ Taux de succès=				95.14%

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$ Taux de succès=				95.14%

Question : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [0.172, 0.234]\right) = \ ?$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$ Taux de succès=				95.14%

Question : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [0.172, 0.234]\right) = 95\%$?

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$ Taux de succès=				95.14%

Réponse : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\underbrace{\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[1287]}}\right)}_{0.172}, \underbrace{\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[1287]}}\right)}_{0.234}]\right) = 100\%$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$Taux de succès=				95.14%

Question : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y})]\right) = \ ?$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y_{[j]}}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y_{[j]}})]$?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$ Taux de succès=				95.14%

Réponse : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}(\mathbf{y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}(\mathbf{y})]\right) =$ 0% ou 100%

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{Y}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{Y}\right)]\right) \simeq$ Taux de succès=				95.14%

Question : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\text{inf}}\left(\mathbf{Y}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\text{sup}}\left(\mathbf{Y}\right)]\right) = \ ?$

Vérification expérimentale

Echantillons générés avec $\mu^\bullet = 0.2$ [(néanmoins inconnu du statisticien)				
j	$\widehat{\mu^\bullet}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)$	$\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}\left(\mathbf{y_{[j]}}\right)]$?
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1284	0.197	0.165	0.229	1
1285	0.224	0.191	0.257	1
1286	0.155	0.128	0.182	0
1287	0.203	0.172	0.234	1
1288	0.218	0.188	0.248	1
1289	0.206	0.175	0.237	1
1290	0.178	0.152	0.204	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{Y})]\right) \simeq$ Taux de succès=				95.14%

Réponse : $\mathbb{P}\left(\mu^\bullet \in [\widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{Y}), \widetilde{\mu^\bullet}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{Y})]\right) = 95\%$

Application : Salaire Juste

Considérons (le **jour J**) disposer d'un échantillon **y** des Salaires Justes de n individus du Pays. Ce jeu de données est noté `yJ` en R. Les formules des intervalles de confiance à 95% pour μ^J et σ_J^2 s'obtiennent très facilement :

Application : Salaire Juste

Considérons (le **jour J**) disposer d'un échantillon **y** des Salaires Justes de n individus du Pays. Ce jeu de données est noté `yJ` en R. Les formules des intervalles de confiance à 95% pour μ^J et σ^2_J s'obtiennent très facilement :

$$
\begin{aligned}
\left\{\begin{array}{l} \widetilde{\mu^J}_{\mathrm{inf}}(\mathbf{y}) \\ \widetilde{\mu^J}_{\mathrm{sup}}(\mathbf{y}) \end{array}\right. &= \widehat{\mu^J}(\mathbf{y}) + \left\{\begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array}\right\} \times \delta^+_{lim,\alpha/2} \widehat{\sigma_{\widehat{\mu}^J}}(\mathbf{y}) \\
&\stackrel{\mathsf{R}}{=} \mathtt{mean(yJ)} + \mathtt{c(-1,1)} * \mathtt{qnorm(.975)} * \mathtt{seMean(yJ)} \\
&\simeq 100.71 \left\{\begin{array}{c} - \\ + \end{array}\right\} 1.96 \times 0.33 \\
&\simeq [100.06, 101.36]
\end{aligned}
$$

Application : Salaire Juste

Considérons (le **jour J**) disposer d'un échantillon **y** des Salaires Justes de *n* individus du Pays. Ce jeu de données est noté yJ en R. Les formules des intervalles de confiance à 95% pour μ^J et σ_J^2 s'obtiennent très facilement :

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{c} \widetilde{\sigma^2_{J_{\text{inf}}}}(\mathbf{y}) \\ \widetilde{\sigma^2_{J_{\text{sup}}}}(\mathbf{y}) \end{array} \right. &= \widehat{\sigma^2_J}(\mathbf{y}) + \left\{ \begin{array}{c} -1 \\ 1 \end{array} \right\} \times \delta^+_{lim,\alpha/2} \widehat{\sigma_{\widehat{\sigma^2_J}}}(\mathbf{y}) \\
&\overset{\text{R}}{=} \mathtt{var(yJ)} + \mathtt{c(-1,1)} * \mathtt{qnorm(.975)} * \mathtt{seVar(yJ)} \\
&\simeq 110.29 \left\{ \begin{array}{c} - \\ + \end{array} \right\} 1.96 \times 12.12 \\
&\simeq [86.53, 134.06]
\end{aligned}$$